INTERNATIONAL JOURNAL OF EUROPEAN RESEARCH OUTPUT
ISSN: 2053-3578 I.F. 12.34

# НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С БОЛЬШИМ ЧИСЛОМ ПЕРЕМЕННЫХ

**Исаева М.Ж.**
Студентка СТ-30/25r
Ташкентского Государственного Экономического Университета
Узбекистан, Ташкент
**Пошаходжаева Г. Д.**
Доцент
Ташкентского Государственного Экономического Университета
Узбекистан, Ташкент

**Аннотация**: В данной научной работе изучаются различные виды задач, связанные с поиском оптимальных решений для планирования общего материального производства в отдельным отраслях и на предприятиях с использованием методов линейное программирование.

**Ключевые слова**: линейное программирование, матрица, издержки, цена, баланс производственного плана, конечная продукция, ограничения, планирование, объём выпуска, оптимальное решение.

# SOME PROBLEMS OF LINEAR PROGRAMMING WITH A LARGE NUMBER OF VARIABLES

**Isaeva M.J.**
Student St-30/25r
Tashkent State University of Economics
Uzbekistan, Tashkent
**Poshakhodjaeva G.D.**
Associate Professor
Tashkent State University of Economics
Uzbekistan, Tashkent

**Abstract**: This scientific work examines various types of problems related to finding optimal solutions for planning the overall material production in different industries and enterprises using methods of linear programming.

Keywords: linear programming, matrix, costs, price, balance of the production plan, final product, constraints, planning, production volume, optimal solution.

Некоторые задачи линейного программирования с большим числом переменных. Во многих случаях поиск наилучшего варианта производственного плана связан с решением задач линейное программирование, в которых используется большое количество переменных.

A. Определение оптимального плана материального производства.

Предположим, что

1) производство сырья и материалов делится на n отраслей;

2) дана матрица B = [bij] (i, j = 1, 2, …, n) коэффициентов материальных затрат в плановом периоде;

3) даны значения конечных продуктов x1(0) , x2(0) , …. , xn(0) (в стоимостном выражении) на период, предшествующий плановому периоду.

Если объемы продукции отдельных отраслей обозначить x1, x2, …, xn , то условие внутренней сбалансированности плана есть система уравнений:

b11X1+b12X2+…+b1nXn+X1=X1, b21X1+b22X2+…+b2nXn+X2=X2,

(1)

bn1X1+bn2X2+…+bnnXn+ Xn=Xn,

где x1, x2, …, xn - плановые конечные продукты отдельных отраслей производства.

Различным значениям конечного общественного продукта соответствуют разные варианты производственных планов по отраслям. Оптимальным планом материального производства считается такой вариант, который, например, обеспечивает уровень конечного продукта не ниже, чем в предыдущем периоде, и одновременно позволяет получить максимальный объём продукции в стоимостном выражении. Таким образом, оптимальным является тот производственный план, который удовлетворяет заданным условиям:

$$x_i = X_i - \sum_{j=1}^{n} b_{ij} X_j \geq X_i(0) \quad (i=1,2,\ldots,n), \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = \max . \qquad (3)$$

Для производства необходимы следующие факторы:

1) предметы труда p,

2) средства труда m,

3) рабочая сила s,

которые имеются в ограниченных количествах.

При построении оптимального варианта производственного плана необходимо определить:

1) нормы расхода факторов производства, имеющихся в ограниченных количествах;

2) размеры запасов по факторам производства;

3) нижние пределы объемов конечных продуктов.

Примем в качестве критерия оптимальности производства максимум конечного общественного продукта; пусть матрица

$$\begin{pmatrix} P11 & P12 \ldots & P1n \\ m11 & m12 \ldots & m1n \\ S11 & S12 \ldots & S1n \end{pmatrix}$$

будет матрицей норм расхода факторов производства (на единицу конечного продукта). Предположим также, что размеры запасов факторов производства составляют соответственно P, M и S.

Следовательно, оптимальным будет такой вариант плана материального производства, который удовлетворяет условиям:

$$xi=Xi\ ,\sum_{j=1}^{n} bij\ Xj \geq xi(0)\ (i=1,2,\ldots,n), \quad (2)$$

$$p11x1+p12x2+\ldots+p1nxn \leq P, \quad (4)$$

$$m11x1+m12x2+\ldots+m1n\ xn \leq M, \quad (5)$$

$$s11x1+s12x2+\ldots+s1nxn \leq S, \quad (6)$$

$$,\sum_{i=1}^{n} xi=max\ . \quad (7)$$

Условия (4), (5), (6) означают, что расход не может превысить ресурсы этих факторов.

Оптимальный вариант плана материального производства можно также определить и другим способом. Предположим, что нам известны:

1) матрица материальных затрат

B=[bij](i, j=1,2 ,…, n),

2) затраты живого труда zj ( j=1 ,2,…, n) на единицу продукции в стоимостном выражении,

3) максимальная занятость z в материальном производстве,

4) заданные конечные продукты xi(0)(i=1, 2,…,n,i≠ k ) .

В качестве оптимального проекта плана можно принять такой вариант, при котором конечный продукт k-й отрасли максимальный, конечные продукты других отраслей не меньше намеченных уровней, а занятость не превышает величины Z. Следовательно, оптимальной будет структура производства в отдельных отраслях, которая удовлетворяет условиям:

$$xi-\ ,\sum^{n} bijxj \geq xi(0)\ (i=1,2,\ldots,n), \quad (8)$$

j=1

$$\sum_{j=1}^{n} z_j x_j \leq Z, \quad (9)$$

$$x_j \geq 0 \ (j=1,2,\ldots,n), \quad (10)$$

$$x_k = x_k - \sum_{j=1}^{n} b_{kj} x_j = \max \quad (11)$$

Также можно выделить и другие критерии оптимальности производственного плана. Предположим, что материальное производство разделено на n отраслей, а взаимосвязи между ними описываются с помощью матрицы.

$$B=[b_{ij}](i,j=1,2,\ldots,n).$$

Предположим далее, что $z_j$ — это количество рабочей силы, необходимое для производства единицы продукции в j-й отрасли, а занятость вне производства обозначим как $z_0$. Если стоимость продукции j-й отрасли обозначить через $x_j$, то величина $z_j X_j$ показывает затраты труда на производство в этой отрасли. Тогда общие затраты общественного труда, необходимые для реализации производственного плана, равны:

$$\sum_{j=1}^{n} z_j x_j .$$

Если ресурсы рабочей силы составляют $z_0$, то должно удовлетворяться уравнение

$$\sum_{j=1}^{n} z_j x_j + z_0 \leq z_0$$

Кроме того, имеют место балансовые уравнения продукции:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j \geq x_i \quad (i=1,2,\ldots,n)$$

где xi — конечный продукт i-й отрасли.

Оптимальным можно считать такой вариант производственного плана, при котором обеспечивается получение заданных объемов конечной продукции

$$X_1(0), X_2(0), \ldots, X_n(0)$$

при минимальных затратах общественного труда. Таким образом, необходимо определить X так, чтобы

$$Z = \sum_{j=1}^{n} z_j X_j = \min \text{ при условиях :}$$

$$X_i - \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j = x_i(0) \quad (i=1,2,\ldots,n), \qquad (13)$$

$$X_j \geq 0, x_i(0) \geq 0 \quad (i,j=1,2,\ldots,n), \qquad (14)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j X_j + z_0 \leq Z_0 \qquad (15)$$

Неравенства в задачах оптимального планирования отражают определённые ограничения свободы выбора варианта плана. Эти ограничения можно разделить на две основные группы:

1) объективные ограничения,
2) плановые ограничения.

Объективные ограничения не зависят от решений, связанных с планом, например от состояния и структуры основных средств на начало планового периода, размера спроса и предложения на внешних рынках, существующей техники производства, ресурсов рабочей силы, имеющихся в наличии на начало периода и т. п.

Плановые ограничения устанавливаются на основе определенных социально-экономических решений. К ним можно отнести такие ограничения, как необходимые размеры коллективного потребления, объем непроизводственных капиталовложений, занятость в материальном производстве, намеченные валютные сальдо в обороте с отдельными внешними рынками, намеченные уровни заработной платы и других доходов населения.

Б. Определение плана отрасли производства. Пусть отрасль производства представлена объединением, в подчинении которого находится n промышленных предприятий, каждое из которых производит продукты 1, 2, …, m.

Для объединения установлен план производства отдельных продуктов в количествах A1, A2,…, Am. Плановые производственные мощности предприятий (в рабочих часах) составляют соответственно T1, T2 ,…,Tn, а издержки производства на единицу продукта в соответствующем предприятии составляют cij(i=1 ,2 ,…,m; j=1 ,2 ,…, n). Оптимальным будет такой план, при котором издержки производства планируемой продукции объединения будут минимальными.

Обозначим через xij(i=1, 2,…,m; j=1, 2,…, n)объем производства i-го продукта в плановом периоде на j-м предприятии. Должны выполняться условия:

$$x_{11}+x_{12}+\ldots+x_{1n}=A_1, \qquad x_{21}+x_{22}+\ldots+x_{2n}=A_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$x_{m1}+x_{m2}+\ldots+x_{mn}=A_m,$$

(некоторые из переменных xijмогут равняться нулю).

Второе условие, которое должны выполнять переменные xij, связано с тем, что объем производства на каждом предприятии не может превышать его производственных мощностей. Поэтому должны выполняться условия:

$$t_{11}\, x_{11}+t_{21}\, x_{21}+\ldots+t_{m1}\, x_{m1}\leq T_1 \qquad t_{12}\, x_{12}+t_{22}\, x_{22}+\ldots+t_{m2}\, x_{m2}\leq T_2 ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$t_{1n}\, x_{1n}+t_{2n}\, x_{2n}+\ldots+t_{mn}\, x_{mn} \leq T_n .$$

Очевидно, что должны также выполняться условия:

$$x_{ij} \geq 0 (i=1, 2, \ldots, m; j=1, 2, \ldots, n). \quad (3)$$

Так как объем производства в отрасли необходимо распределить между предприятиями таким образом, чтобы общие производственные издержки были минимальными, должно выполняться следующее условие:

C=c11 x11+c12 x12+…+c1n x1n+¿ +c21 x21+c22 x22+…+c2n x2n+¿ (4)

+cm1 xm1+cm2 xm2+…+cmn xmn=min.

Решение задачи сводится к тому, чтобы найти такие значения неизвестных xij(i=1, 2 ,…,m; j=1, 2 ,…,n), чтобы они удовлетворяли условиям (1), (2), (3) и чтобы выражение (4) приняло минимальное значение.

В рассматриваемом случае критерий оптимальности – издержки производства. Можно также принять и иной критерий оптимальности, например максимальное использование производственных мощностей предприятий. Тогда оптимальным будет такой вариант плана объединения, для которого выполняются условия (1), (2), (3) и

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} t_{ij}x_{ij} = \max . \qquad (5)$$

Пример. В качестве примера рассмотрим следующую ситуацию: компания располагает двумя производственными филиалами (цех №1 и цех №2). Оба цеха выпускают два вида продукции — мониторы и ноутбуки. Однако из-за различий в оборудовании затраты времени и материалов на производство одного и того же изделия в каждом цехе отличаются, и их значения представлены в следующей таблице.

| Ресурс | Монитор (Цех 1) | Ноутбук (Цех 1) | Монитор (Цех 2) | Ноутбук (Цех 2) |
|---|---|---|---|---|
| Трудозатраты (чел-час) | 4 | 10 | 6 | 8 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Комплектующие (ед. Деталей) | 2 | 5 | 3 | 4 |

Наличие ресурсов и рыночные условия.

| Параметр | Значение |
|---|---|
| Лимит рабочего времени (Цех 1) | 8 000 чел-часов |
| Лимит рабочего времени (Цех 2) | 9 500 чел-часов |
| Запас деталей на складе (всего) | 6 000 единиц |
| Цена продажи Монитора | 1 500 у.е. |
| Цена продажи Ноутбука | 3 200 у.е. |

Согласно контрактам, компания обязана выпустить не менее 1 000 мониторов и не менее 500 ноутбуков суммарно по обоим цехам.

Введем переменные:

X1 — количество мониторов в Цехе №1;

X2 — количество ноутбуков в Цехе №1;

X3 — количество мониторов в Цехе №2;

X4 — количество ноутбуков в Цехе №2.

Ограничения по ресурсам:

Рабочее время Цеха 1: $4x1 + 10x2 \leq 8\,000$ (6)

Рабочее время Цеха 2: $6x3 + 8x4 \leq 9\,500$ (7)

Общий запас деталей: $2x1 + 5x2 + 3x3 + 4x4 \leq 6\,000$ (8)

Ограничения по плану (государственный или коммерческий заказ):

По мониторам: $x1 + x3 \geq 1\,000$ (9)

По ноутбукам: $x2 + x4 \geq 500$ (10)

Целевая функция (Максимизация выручки):

Нам нужно найти такие значения x, при которых общая стоимость продукции будет максимальной:

$$Z=1\,500x(X1+X3)+3\,200x(X2+X4) \Rightarrow \max$$

принимает максимальное значение.

INTERNATIONAL JOURNAL OF EUROPEAN RESEARCH OUTPUT
ISSN: 2053-3578 I.F. 12.34

Список использованной литературы

1. Ашманов С. А. “Линейное программирование” (1981)
2. Палий И. А. “Линейное программирование” (2008)
3. В. И. Бахтин, И. А. Иванишко “Линейное программирование”
4. Х. Э. Крыньский “Математика для экономистов” (1970)
5. Д. Б. Юдин, Е. Г. Гольштейн “Задачи и методы линейного программирования”
6. Кузнецов Ю. Н., Кузубов В. И., Волощенко А. Б. «Математическое программирование»
7. Данциг Дж. Линейное программирование и расширения. — М.: Прогресс, 1966.
8. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. — М.: Физматлит, 1999.
9. Хиллери Ф., Либерман Дж. Введение в исследование операций. — М.: Мир, 2000.
10. Таха Х. Исследование операций. — М.: Вильямс, 2019.